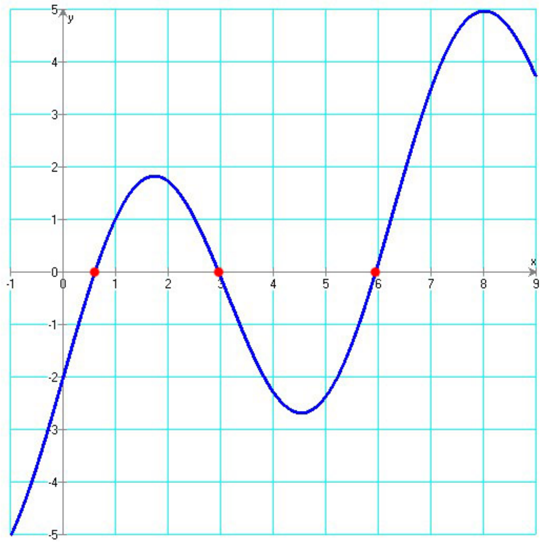
Chapitre 4

Zéros d'une fonction

Trouver les zéros d'une fonction *f*, c'est déterminer à quelles abscisses cette fonction coupe l'axe des *x* (points rouges dans l'image ci-dessous). Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.



Or, selon la fonction, l'entreprise peut se révéler difficile, voir impossible, en utilisant des méthodes algébriques. Pour les polynômes par exemple, Galois a montré qu'il n'existe pas de formules pour les polynômes de degré supérieur à 4.

Dans ces cas, l'emploi de méthodes numériques est indispensable. Nous allons en voir quelques-unes dans ce chapitre.

4.1. Recoupement par intervalles (*bracketing*)

Il s'agit de construire des intervalles susceptibles de contenir un zéro. Ultérieurement, on raffinera la recherche du zéro à l'intérieur de l'intervalle.

On subdivise un domaine donné en sous-intervalles réguliers et on examine si la fonction (supposée continue) coupe l'axe des *x* en regardant le signe de la fonction évaluée aux bords du sous-intervalle.

Exercice 4.1

Programmez la méthode de bracketing, puis testez-la avec les fonctions $f(x) = \sin(\cos(2x^2+1))$ et $g(x) = x^5 - x^2 - 1$, dans l'intervalle [0, 2], subdivisé en 20 sous-intervalles.

4.2. Méthode de dichotomie

Une dichotomie (du grec « couper en deux ») permet de trouver rapidement une valeur approchée de x telle que $f(x) = 0$. Cette méthode n'est pas sans rappeler le jeu « devine mon nombre » que nous avons programmé au chapitre 2.

Petite astuce : si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors $f(a)\cdot f(b) < 0$.

Soit f une fonction telle que :

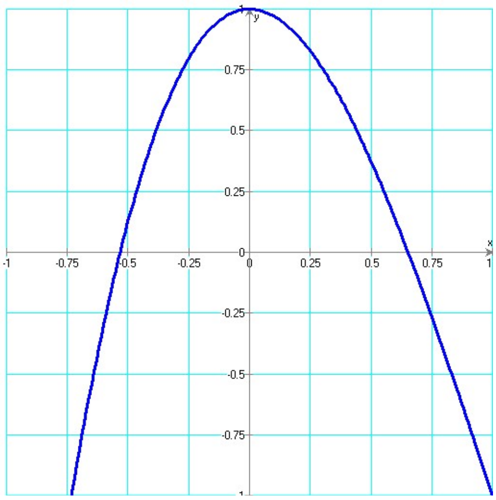
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés
- f est continue strictement croissante (ou décroissante) sur $[a, b]$

Méthode

1. partir du couple de valeurs (a, b)
2. évaluer la fonction en $\frac{a+b}{2}$
3. si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ a le même signe que $f(a)$, remplacer a par $\frac{a+b}{2}$, sinon remplacer b par $\frac{a+b}{2}$
4. aller en 2 avec le nouveau couple de valeurs (a, b) jusqu'à ce que la différence entre a et b soit inférieure à la précision voulue.

Exercice 4.2

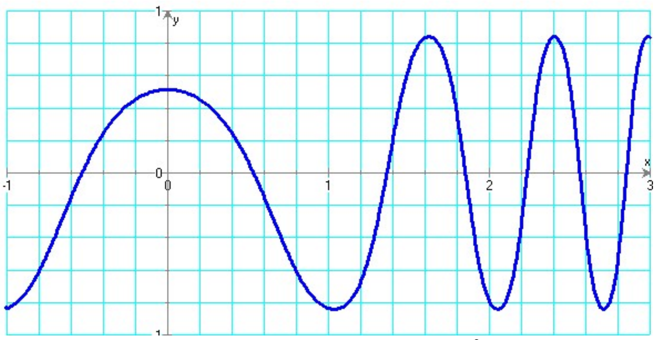
Illustrez la dichotomie sur le graphe ci-dessous, pour trouver le zéro compris entre −1 et 0.
Idem pour le zéro compris entre 0 et 1.



Exercice 4.3

a) Calculez, avec la méthode de la dichotomie et à l'aide d'une calculatrice, le zéro de la fonction $\sin(\cos(2x^2+1))$ se trouvant dans l'intervalle $[0, 1]$, avec une précision de 0.0001.

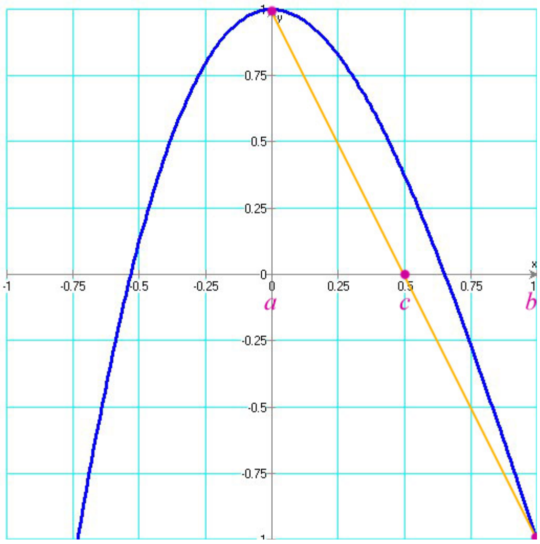
b) Programmez la dichotomie pour répondre à la question a).



Courbe de la fonction $\sin(\cos(2x^2+1))$

4.3. *Regula falsi*

Étant données les abscisses a et b, nous construisons la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, comme dans la figure ci-dessous.



Remarquons que cette droite est une sécante de la fonction f. En utilisant la pente et un point, l'équation de la droite peut s'écrire :

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

Nous déterminons maintenant c, l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses (zéro de la sécante) donnée par :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)+f(a)=0$$

La résolution de l'équation précédente donne c :

$$c=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$$

Déroulement du calcul

Comme la méthode de dichotomie, la *regula falsi* commence par deux points a_1 et b_1 tels que $f(a_1)$ et $f(b_1)$ soient de signes opposés, ce qui implique que la fonction continue f possède au moins un zéro dans l'intervalle $[a_1, b_1]$. La méthode consiste à produire une suite d'intervalles toujours plus petits $[a_k, b_k]$ qui contiennent tous un zéro de f. À l'étape k, le nombre

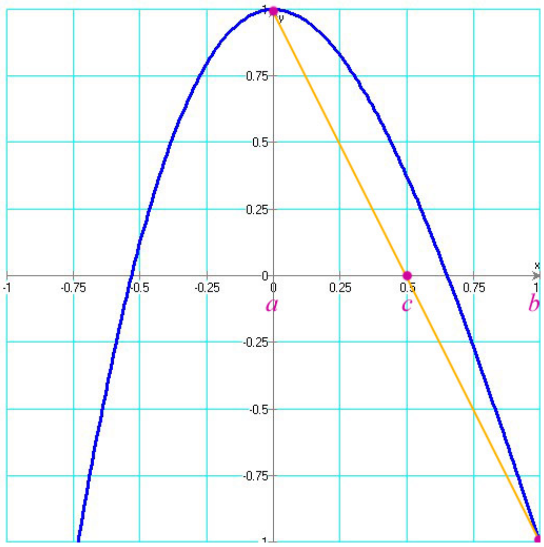
$$c_k=a_k-\frac{b_k-a_k}{f(b_k)-f(a_k)}f(a_k)$$

est calculé. Comme expliqué ci-dessus, c_k est l'abscisse de l'intersection de la droite passant par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ avec l'axe des abscisses. Si $f(a_k)$ et $f(c_k)$ sont de même signe, alors nous posons $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$, sinon nous posons $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$.

Ce procédé est répété jusqu'à ce $f(c_k)$ soit « suffisamment proche » de 0.

Exercice 4.4

Illustrez le déroulement de la *regula falsi* sur le graphe ci-dessous, pour trouver le zéro compris entre 0 et 1.



Exercice 4.5

a) Trouvez, avec la méthode de la *regula falsi* et à l'aide d'une calculatrice, le zéro de la fonction $\sin(\cos(2x^2+1))$ se trouvant dans l'intervalle [0, 1], avec une précision de 0.0001.

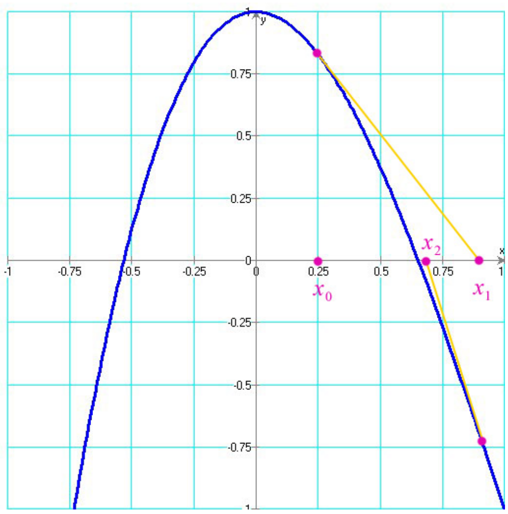
b) Programmez la *regula falsi* pour répondre à la question a).

4.4. Méthode de Newton-Raphson

En analyse numérique, la **méthode de Newton-Raphson**, est un algorithme efficace pour approcher un zéro d'une fonction. De manière informelle, le nombre de décimales correctes double à chaque étape.

Partant d'une valeur approximative raisonnable d'un zéro x_0 d'une fonction *f*, on approche la fonction par sa tangente au point (x_0 ; $f(x_0)$). Cette tangente est une fonction affine dont on sait trouver l'unique zéro (que l'on appellera x_1). Ce zéro de la tangente sera généralement plus proche du « vrai » zéro de la fonction.

On recommence les mêmes calculs en partant cette fois de x_1, ce qui va nous donner l'abscisse x_2, etc.



Par récurrence, on définit la suite x_n par : $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

En principe, cette suite va converger vers le zéro cherché.

Si la fonction présente un extremum local, il y a un risque que la méthode ne converge pas, car la valeur de la dérivée est nulle en un extremum et le nouveau point à l'infini.

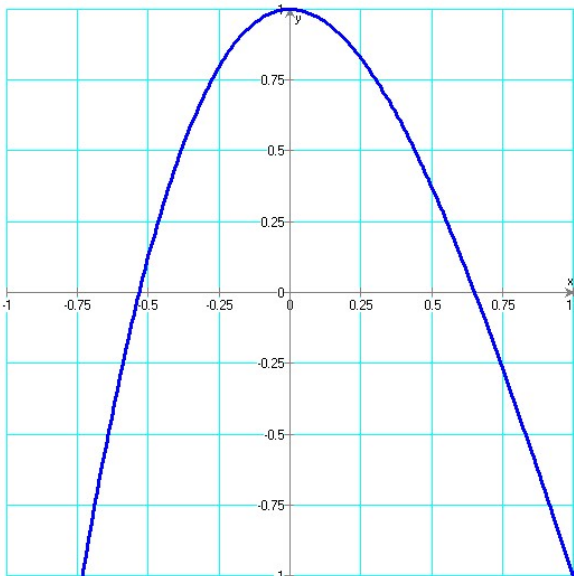
Exercice 4.6

Retrouvez la valeur de x_{n+1} en partant de l'équation de la droite $y-y_0 = m(x-x_0)$.
La pente m de la tangente en a est donnée par la dérivée $f'(a)$.

Exercice 4.7

Illustrez le déroulement de la méthode de Newton-Raphson sur le graphe ci-dessous...

a) avec $x_0 = -0.25$;
b) avec $x_0 = 0$.



Exercice 4.8

a) Calculez, avec la méthode de Newton-Raphson et à l'aide d'une calculatrice, le zéro de la fonction $f(x) = \sin(\cos(2x^2+1))$ se trouvant dans l'intervalle [0 ; 1], avec une précision de 0.0001.

Indication : $f'(x) = -4x\cdot\cos(\cos(2x^2+1))\cdot\sin(2x^2+1)$.

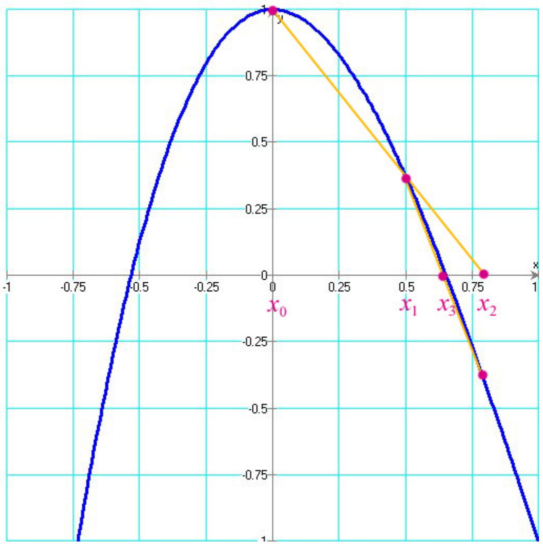
b) Programmez la méthode de Newton-Raphson pour répondre à la question a).
c) Expliquez ce qui se passe en prenant $x_0 = 1$, $x_0 = 1.1$, et $x_0 = 1.2$.

4.5. Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est une méthode dérivée de celle de Newton-Raphson où l'on remplace la dérivée $f'(x_n)$ par $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$.

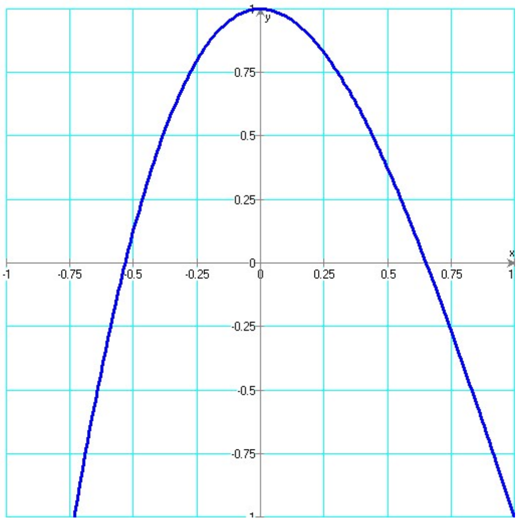
On obtient la relation de récurrence $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}f(x_n)$.

L'initialisation nécessite deux points x_0 et x_1 proches de la solution recherchée. Il n'est pas nécessaire que x_0 et x_1 encadrent une racine de $f(x)$.



Exercice 4.9

Illustrez le déroulement de la méthode de la sécante sur le graphe ci-dessous avec $x_0 = -0.7$ et $x_1 = -0.25$.



Exercice 4.10

a) Calculez, avec la méthode de la sécante et à l'aide d'une calculatrice, le zéro de la fonction $f(x) = \sin(\cos(2x^2+1))$ se trouvant dans l'intervalle [0, 1], avec une précision de 0.0001.

b) Programmez la méthode de la sécante pour répondre à la question a).

c) Expliquez ce qui se passe en prenant $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$.

4.6. Programmation d'un traceur de courbe

Un *traceur de courbes* (on dit aussi parfois un *grapheur*) est un logiciel qui permet de calculer et dessiner et la courbe représentative d'une fonction mathématique.

Pour réaliser un tel logiciel en Python, il nous faudra quelques fonctions graphiques contenues dans le module `tkinter`. Il s'agira essentiellement de tracer des segments de droite.

Voyons comment ouvrir une fenêtre graphique et dessiner un segment à l'écran :

```
from tkinter import *

fen = Tk()
can = Canvas(fen, bg='white', width=600, height=400)
can.pack(side=LEFT)
can.create_line(10, 10, 100, 200, width=2, fill='black')  # segment
can.create_text(10, 5, text="A")
can.create_text(100, 205, text="B")
```

Reprenons ce programme ligne par ligne.

```
from tkinter import *
```

`tkinter` est le module qui permet de dessiner.

```
fen = Tk()
```

`fen` est la fenêtre graphique.

```
can = Canvas(fen, bg='white', width=600, height=400)
```

`can` est le canevas dans lequel on va dessiner. Ici, il occupera toute le fenêtre. Il a un fond blanc (`white`) et pour dimensions 600 x 400 pixels.

```
can.pack(side=LEFT)
```

`can` est calé à gauche de la fenêtre, mais cela n'a pas d'importance ici.

```
can.create_line(10, 10, 100, 200, width=2, fill='black')  # segment
```

Dans l'exemple, le segment va du point (10, 10) au point (100, 200). Il a une largeur de 2 pixels et la couleur noire (`black`). On utilisera `black` pour les axes et les graduations, `blue` pour la courbe, `white` comme couleur de fond et `gray75` pour le quadrillage.

Attention ! L'origine (0, 0) est dans le coin supérieur gauche de la fenêtre. Le coin inférieur droit aura comme coordonnées (largeur, hauteur), dans notre exemple (600, 400).

```
can.create_text(10, 5, text="A")
can.create_text(100, 205, text="B")
```

Ces deux lignes écrivent les lettres A et B aux coordonnées indiquées.

Si on veut écrire un nombre contenu dans une variable, il faudra convertir ce nombre en une chaîne de caractères :

```
i = 4
can.create_text(100, 205, text=str(i))
```

Exercice 4.11

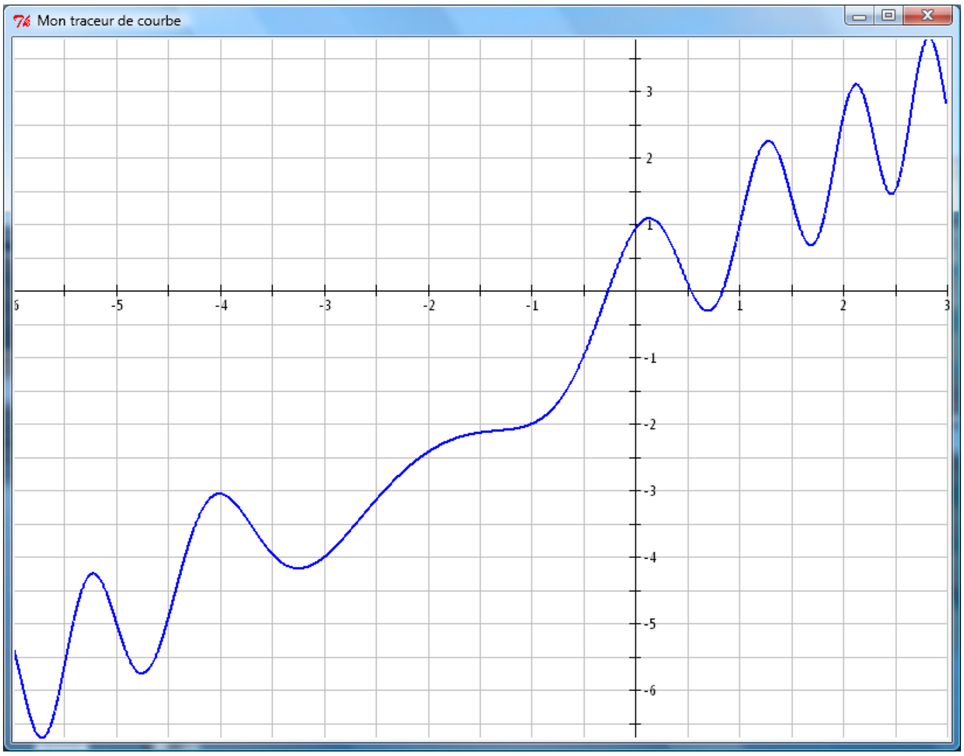
Pour simplifier les choses, on supposera que la fonction f à dessiner est continue. Pour fixer les idées, prenons la fonction $f(x) = x + \sin(x^2 + 4x - 5)$.

On supposera aussi que les bornes de l'intervalle $[a, b]$ sont des nombres entiers. On prendra ici l'intervalle $[-6, 3]$.

Procédez par étapes :

1. tabulez la fonction dans l'intervalle $[a, b]$ et repérez les valeurs *y_min* et *y_max* ;
2. définissez la fonction affine qui transformera le couple $(x ; f(x))$ en un point de la fenêtre graphique ; le couple (a ; *y_max*) sera envoyé sur le point (0 ; 0) et le couple (b ; *y_min*) sur le point (*largeur*, *hauteur*).
3. tracez la courbe ;
4. dessinez les deux axes ;
5. graduez les axes ;
6. ajoutez un quadrillage.

Voici le résultat final attendu :



Charles-François **Sturm** (1803-1855)

4.7. Suites de Sturm

Soit $P(x)$ un polynôme n'ayant que des racines simples. La **suite de Sturm** de ce polynôme est une suite de polynômes qui permet de déterminer le nombre de racines de P dans un intervalle donné.

On pose d'abord $P_0 = P$ et $P_1 = P'$. Pour calculer P_2, on écrit :

$$P_0 = P_1Q_1 - P_2$$

où Q_1 est le quotient de la division euclidienne et où le degré de P_2 est strictement inférieur à celui de P_1.

En d'autres termes, P_2 est l'opposé du reste dans la division euclidienne de P_0 par P_1. Puis on recommence et on définit P_{k+1} comme l'opposé du reste dans la division euclidienne de P_{k-1} par P_k,

$$P_{k-1} = P_kQ_k - P_{k+1} .$$

On s'arrête lorsqu'on obtient un polynôme constant P_n, ce qui arrive forcément puisque les degrés des polynômes obtenus décroissent à chaque division. La suite de Sturm du polynôme P est alors :

$$S(x) = (P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)).$$

On note $V(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite $S(x)$.

Le théorème de Sturm s'énonce à présent ainsi :

Le nombre de racines de P dans l'intervalle $[a, b]$ est égal à la différence $V(a) - V(b)$.

Exemple : Soit $P(x) = x^3 + 6x^2 - 16$. On a $P_0 = P$, $P_1 = P'(x) = 3x^2 + 12x$.

Pour trouver P_2, on divise P_0 par P_1 :

$$
\begin{array}{lrl}
P_0 \Rightarrow & x^3 + 6x^2 \qquad - 16 & \underline{|\ 3x^2 + 12x\ } \Leftarrow P_1 \\
& \underline{-x^3 - 4x^2} \qquad\qquad & \quad x/3 + 2/3 \Leftarrow Q_1 \\
& 2x^2 \qquad\qquad & \\
& \underline{-2x^2 - 8x} \qquad & \\
& -8x - 16 & \Leftarrow -P_2
\end{array}
$$

On trouve $P_2 = -(-8x - 16) = 8x + 16$.

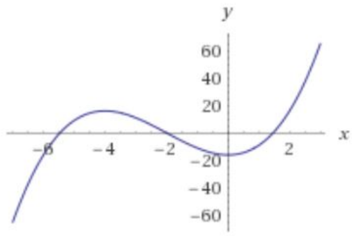
Pour trouver P_3, on divise P_1 par P_2 :

$$
\begin{array}{lrl}
P_1 \Rightarrow & 3x^2 + 12x \qquad & \underline{|\ 8x + 16\ } \Leftarrow P_2 \\
& \underline{-3x^2 - 6x} \qquad & \quad 3x/8 + 3/4 \Leftarrow Q_2 \\
& 6x \qquad & \\
& \underline{-6x - 12} & \\
& -12 & \Leftarrow -P_3
\end{array}
$$

On trouve $P_3 = -(-12) = 12$. Le processus s'arrête ici, puisque P_3 est un polynôme constant.

On a trouvé la suite de Sturm de P : $S(x) = (x^3 + 6x^2 - 16, 3x^2 + 12x, 8x + 16, 12)$.

On peut maintenant savoir combien P a de zéros dans l'intervalle $[a, b]$. Prenons par exemple l'intervalle $[-7, 2]$:



$S(-7) = (-65, 63, -40, 12)$. Il y a 3 changements de signe dans cette suite, donc $V(-7) = 3$.

$S(2) = (16, 36, 32, 12)$. Cette fois, il n'y a pas de changement de signe, donc $V(2) = 0$.

Comme $V(-7) - V(2) = 3$, le polynôme $x^3 + 6x^2 - 16$ admet ses 3 racines dans l'intervalle $[-7, 2]$.

Dans l'intervalle $[0, 2]$:

$S(0) = (-16, 0, 16, 12)$. Il y a un seul changement de signe dans cette suite, donc $V(0) = 1$.
Puisque $V(0) - V(2) = 1$, le polynôme $x^3 + 6x^2 - 16$ admet une racine dans l'intervalle $[0, 2]$.

Exercice 4.12

Calculez la suite de Sturm du polynôme $P(x) = x^4 - 8x^2 - 6x - 1$.
Grâce à cette suite, déterminez le nombre de zéros de P dans les intervalles $[-4, 0]$ et $[0, 4]$.
Vérifiez ces résultats avec votre traceur de courbe.

Sources

[1] Wikipédia, « Méthode de dichotomie », <http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_dichotomie>
[2] Wikipédia, « Méthode de la fausse position », <http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_la_fausse_position>
[3] Wikipédia, « Méthode de la sécante », <http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_la_sécante>
[4] Science & Vie Questions Réponses, Hors-Série N°1, novembre 2016, « Équations du second degré »